

Pythagoräische und euklidische Jordan-Algebren

von

Wolfgang Fuchs

aus

Welden



Digitized by the Internet Archive
in 2026

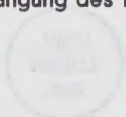
https://archive.org/details/IA41546220_0078

Pythagoräische und euklidische Jordan - Algebren

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Wolfgang Fuchs

aus

Welden

Als Dissertation genehmigt von den Natur-
wissenschaftlichen Fachbereichen der
Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

21. Juli 1976

Vorsitzender der Promotions-
kommission:

Prof. Dr. H. Remmert

Erstberichterstatter:

Prof. Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter:

Doz. Dr. P. Plaumann

Inhalt

Einleitung	2
§1. Vorbemerkungen	8
§2. Pythagoräische Jordan-Algebren	16
§3. Vollkommene und formal-reelle Jordan-Algebren als Beispiele pythagoräischer Jordan-Algebren	224
§4. Reduzierte pythagoräische Jordan- Algebren	37
§5. Euklidische Jordan-Algebren	43
Literaturverzeichnis	50

Einleitung

Im Jahre 1932 behandelte P.Jordan erstmals eine Klasse kommutativer nicht-assoziativer Algebren, die sich aus Fragestellungen der Quantenmechanik ergeben hatten, und die später nach ihm Jordan-Algebren genannt wurden. Jordan, v.Neumann und Wigner stellten 1934 in [10] eine Strukturtheorie der endlich-dimensionalen formal-reellen Jordan-Algebren auf, d.h. eine Strukturtheorie solcher Jordan-Algebren über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$, in denen die Gleichung $x^2+y^2=0$ nur durch $x=y=0$ lösbar ist. Die formal-reellen Jordan-Algebren wurden 1966 von Helwig [7] verallgemeinert zur Klasse sogenannter vollkommener Jordan-Algebren, die durch die beiden folgenden Bedingungen definiert sind:

- (V1) Jede Unteralgebra ist halbeinfach.
- (V2) Jede einfache assoziative Unteralgebra ist eindimensional.

Helwig zeigte in [7] mit Hilfe der strukturtheoretischen Betrachtungen von Albert [2] unter anderem, daß vollkommene Jordan-Algebren vom Grad ≥ 3 isomorph zu Jordan-Matrixalgebren von der in §4 beschriebenen Form sind, ferner, daß ihr Grundkörper pythagoräisch ist, und daß alle ihre Eigenwerte bereits im Grundkörper liegen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die vollkommenen Jordan-Algebren verallgemeinert werden durch pythagoräische

Jordan-Algebren: Eine endlich-dimensionale Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ heiße pythagoräisch, wenn sie den nachstehenden Bedingungen genügt:

(P1) $x^2+y^2=0$ impliziert $x=y=0$ für alle $x,y \in \mathfrak{A}$.

(P2) Die Summe zweier Quadrate von $\mathfrak{A}$ ist wieder ein Quadrat in $\mathfrak{A}$.

In §1 werden die für das Folgende wichtigen Begriffe aus der Theorie der endlich-dimensionalen Jordan-Algebren zusammengestellt. Es wird die Bilinearform $\mathfrak{s}(x,y) = \text{Sp } L(xy)$ eingeführt, die beim Nachweis, daß vollkommene Jordan-Algebren pythagoräisch sind, eine tragende Rolle spielt. Breiteren Raum nimmt die Übersicht der wichtigsten Eigenschaften der Peirce-Zerlegung ein, die bei Strukturuntersuchungen von großer Bedeutung ist. Die Beweise der zusammengestellten Eigenschaften finden sich zu einem großen Teil in [1] und [2], sind aber auch in den Lehrbüchern [5], [9] und [14] zusammengetragen.

Pythagoräische Algebren werden in §2 eingeführt. Da sie wegen (P1) keine nilpotenten Elemente enthalten, und da ihr Grundkörper formal-reell, also insbesondere von Charakteristik Null, ist, genügen bereits die Eigenschaften kommutativ und potenz-assoziativ, um sie zu Jordan-Algebren werden zu lassen. Im Falle reduzierter pythagoräischer Jordan-Algebren ist der Grundkörper sogar pythagoräisch. Ferner sieht man unmittelbar, daß man sich auf die Betrachtung zentral-einfacher pytha-

goräischer Jordan-Algebren zurückziehen kann. Den Abschluß des zweiten Kapitels bilden einige Beispiele.

§3 beginnt mit einem Abriß der Eigenschaften der Minimalzerlegung eines Elements einer Jordan-Algebra, der im wesentlichen dem Buch von Braun-Koecher ([5], Kap. I und VIII) entnommen ist. Anschließend werden vollkommene Jordan-Algebren eingeführt, die dadurch gekennzeichnet sind, daß alle Minimalpolynome ihrer Elemente bereits über dem Grundkörper in Linearfaktoren zerfallen. Es wird dann der Quadratbereich einer vollkommenen Jordan-Algebra als die Menge derjenigen Elemente, deren Eigenwerte bezüglich jeder Anordnung des Grundkörpers positiv sind, beschrieben. Damit erhält man den Satz: Jede vollkommene Jordan-Algebra ist pythagoräisch, und man kann den folgenden Helwigschen Satz erweitern: Über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind die Begriffe formal-reell, vollkommen und pythagoräisch äquivalent. Ferner lassen sich durch eine geeignete Erweiterung des Begriffes Positivitätsbereich mit Hilfe der Intervalltopologie einige Sätze aus [8] auf vollkommene Jordan-Algebren über euklidischem Grundkörper übertragen. Z.B. entsprechen einander in einer vollkommenen Jordan-Algebra über euklidischem Grundkörper einfache Ideale und unzerlegbare Positivitätsbereiche. Zum Abschluß des Kapitels wird noch erwähnt, daß auch unendlich-dimensionale formal-reelle Jordan-

Algebren, wie sie von Janssen [11] eingeführt worden sind, pythagoräisch sind.

§4 befaßt sich mit reduzierten pythagoräischen Jordan-Algebren, insbesondere mit der Frage, wann eine reduzierte zentral-einfache pythagoräische Jordan-Algebra vom Grad ≥ 3 isomorph zu einer (möglichst "einfachen") Jordan-Matrixalgebra ist. Wir erhalten, daß dies in den beiden folgenden Fällen eintritt: Reduzierte zentral-einfache pythagoräische Jordan-Algebren über einem euklidischen Grundkörper K sind, wie man mit Hilfe von [2] schließt, isomorph zu einer Jordan-Matrixalgebra $\mathcal{H}_r^+(K_m)$. Dabei ist K_m eine Kompositionsalgebra mit Involution über K derart, daß K_2 ein quadratischer Erweiterungskörper von K , K_4 eine Quaternionenalgebra und K_8 eine Cayley-Algebra über K ist, und für K_m gibt es eine Basis $e_1, \dots, e_m$, $m=1,2,4,8$, mit $e_i e_j = -e_j e_i$, $e_i^2 = -e_1$, $e_i e_j = \pm e_k$, $e_i e_1 = e_i = e_1 e_i$, $1 \leq i, j, k \leq m$. $\mathcal{H}_r^+(K_m)$ bezeichnet den Vektorraum der bezüglich der Involution Hermite-schen Matrizen mit Koeffizienten in K_m , auf dem die (Jordan-)Multiplikation $a \cdot b = 1/2 (ab + ba)$, ab das gewöhnliche Matrizenprodukt aus a und b , erklärt ist, und r ist der Grad der Algebra. Allgemeiner gilt, indem man Ergebnisse aus [5] verwendet, daß reguläre reduzierte zentral-einfache pythagoräische Jordan-Algebren zu Matrixalgebren des Typs $\mathcal{H}_r^+(\mathcal{C})$ isomorph sind, wobei $\mathcal{C}$ eine Kompositionsalgebra des Grades 1, 2, 4 oder 8 über K ,

jedoch im allgemeinen nicht von der einfachen Gestalt K_m , ist.

Im letzten Abschnitt werden, in Analogie zu dem verwandten Begriff in der Körpertheorie, euklidische Jordan-Algebren eingeführt. Es wird unterschieden zwischen schwach euklidischen und euklidischen (endlich-dimensionalen) Jordan-Algebren: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt schwach euklidisch, wenn sie die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(SE1) Für alle $x \neq 0$ gilt $x^2 \neq 0$.

(SE2) Für jedes $x \in \mathfrak{A}$ ist entweder x oder $-x$ Quadrat in $\mathfrak{A}$,

und $\mathfrak{A}$ heißt euklidisch, wenn

(E1) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}$ folgt aus $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ stets $x_i = 0$,
 $i=1, \dots, n$.

(E2) wie (SE2)

gilt.

Eine schwach euklidische Jordan-Algebra ist stets ein Jordan-Körper, woraus sofort folgt, daß endliche schwach euklidische Jordan-Algebren endliche Körper sind (z.B. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$), und daß im reduzierten Falle die Algebra gleich ihrem Grundkörper ist. Über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ selbst die einzige schwach euklidische Jordan-Algebra. Schwach euklidische Jordan-Algebren lassen sich durch ihre Mutationen charakterisieren: In einer schwach euklidischen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ sind alle Mutationen ent-

weder isomorph oder antiisomorph zu $\mathfrak{A}$, umgekehrt ist die Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ schwach euklidisch, wenn es zu jeder Mutation ein $b \in \mathfrak{A}$ gibt derart, daß $P(b)$ entweder Isomorphismus oder Antiisomorphismus von der Mutation in $\mathfrak{A}$ ist.

Den Abschluß bilden einige Bemerkungen über euklidische Jordan-Algebren: Der Grundkörper ist formal-reell, die Algebra läßt sich vollständig ordnen und sie ist demnach pythagoräisch.

Herr Prof. Dr. Strambach hat diese Arbeit angeregt und in vielen Gesprächen ihre Entstehung gefördert. Dafür möchte ich ihm an dieser Stelle danken.

§1. Vorbemerkungen

Im ersten Kapitel werden die für das Folgende wichtigen Begriffe und Sätze aus der Theorie der endlich-dimensionalen Jordan-Algebren zusammengestellt. Die Beweise finden sich größtenteils in den Arbeiten [1]-[3] von Albert, aber auch in den Lehrbüchern [5], [9] und [14].

1. Unter einer Algebra $\mathfrak{A}$ über einem Körper K versteht man einen linearen Raum $\mathfrak{A}$, auf dem eine bilineare, im allgemeinen weder assoziative noch kommutative, Multiplikation erklärt ist. Im Verlauf dieser Arbeit sind, soweit keine anderen Angaben gemacht werden, alle Algebren endlich-dimensional. Uns interessieren im Folgenden einige Spezialfälle:

Die Algebra $\mathfrak{A}$ heißt potenz-assoziativ, wenn für die rekursiv durch $a^1 = a$, $a^{m+1} = aa^m$ definierten Potenzen das assoziative Gesetz $a^{r+s} = a^r a^s$ für alle natürlichen Zahlen r, s und alle $a \in \mathfrak{A}$ gilt. Sie heißt flexibel, wenn für $a, b \in \mathfrak{A}$ stets $a(ba) = (ab)a$ ist. Unter einer Jordan-Algebra versteht man eine kommutative Algebra, die dem Gesetz

$$(J) \quad a^2(ab) = a(a^2b) \quad \text{für } a, b \in \mathfrak{A}$$

genügt. Jede assoziative Algebra erfüllt (J), jede Jordan-Algebra ist flexibel und potenz-assoziativ.

Nähelegendste Beispiele für echte Jordan-Algebren sind die Algebren $\mathfrak{A}^+$, die aus einer assoziativen Algebra $\mathfrak{A}$ entstehen, indem man im Vektorraum $\mathfrak{A}$ eine neue, mit " $\bullet$ " bezeichnete Multiplikation einführt: $a \bullet b = 1/2(ab+ba)$, wobei ab das Produkt von a und b in der assoziativen Algebra $\mathfrak{A}$ bedeutet.

2. In üblicher Weise wird ein Ideal I einer Jordan-Algebra definiert als ein Untervektorraum, für den stets $ai \in I$ für $i \in I$, $a \in \mathfrak{A}$ gilt. Ein Ideal I heißt auflösbar, wenn es für die Idealkette $I^{(1)} \supset I^{(2)} \supset I^{(3)} \dots$, die rekursiv durch $I^{(1)} = I$, $I^{(r+1)} = I^{(r)} I^{(r)}$ definiert ist, eine natürliche Zahl n gibt mit $I^{(n)} = 0$. Man nennt I nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß jedes Produkt $i_1 i_2 \dots i_n$ von n Elementen aus I verschwindet, und ein Nilideal, wenn es nur aus nilpotenten Elementen besteht. Albert [2] hat gezeigt, daß es ein eindeutig bestimmtes maximales auflösbares Ideal gibt, das mit dem maximalen Nilideal und dem maximalen nilpotenten Ideal zusammenfällt, und das man das Radikal der Jordan-Algebra nennt.

Mit halbeinfach wird eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ bezeichnet, wenn das Radikal R verschwindet. Stets ist $\mathfrak{A}/R$ halbeinfach. Besitzt $\mathfrak{A}$ nur $\mathfrak{A}$ und das Nullideal als Ideale, so heißt $\mathfrak{A}$ einfach. Eine halbeinfache Jordan-Algebra zerfällt in eine endliche direkte Summe von einfachen Idealen I_k mit Einselementen e_k , und es ist $\sum_k e_k = e$, wobei e das Einselement von $\mathfrak{A}$ ist.

3. Der Nukleus $N(\mathfrak{A})$ einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist die Menge $N(\mathfrak{A}) := \{n \in \mathfrak{A} \mid (n, x, y) = (x, n, y) = (x, y, n) = 0\}$ mit $(n, x, y) = (nx)y - n(yx)$ für alle $x, y \in \mathfrak{A}$. Die Teilmenge $Z(\mathfrak{A})$ von $N(\mathfrak{A})$ mit $za = az$ für $z \in Z(\mathfrak{A})$, $a \in \mathfrak{A}$ heißt das Zentrum von $\mathfrak{A}$. Das Zentrum einer einfachen Algebra mit Einselement ist ein endlicher Erweiterungskörper des Grundkörpers K von $\mathfrak{A}$. Man nennt $\mathfrak{A}$ zentral, wenn $Z(\mathfrak{A}) = K$ gilt, und zentral-einfach, wenn es zentral und einfach ist. Jede einfache Algebra kann als zentral-einfache Algebra über ihrem Zentrum aufgefaßt werden.

4. Von nun an sei $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra über einem Körper der Charakteristik ungleich 2. Für ein $x \in \mathfrak{A}$ bezeichnet $L(x)$ die lineare Transformation, die jedes a in xa überführt. Man nennt $L(x)$ die linksreguläre Darstellung von x aus $\mathfrak{A}$. Damit schreibt sich die Identität (J) als

$$(J') \quad L(x^2)L(x) = L(x)L(x^2).$$

Zwei Elemente x, y von $\mathfrak{A}$ heißen vertauschbar, wenn $L(x)L(y) = L(y)L(x)$ ist.

Durch $\mathfrak{S}(x, y) = \text{Sp } L(xy)$ wird eine symmetrische Bilinearform mit Werten in K definiert. $\mathfrak{S}$ ist assoziativ in dem Sinn, daß $\mathfrak{S}(xy, z) = \mathfrak{S}(x, yz)$, $x, y, z \in \mathfrak{A}$, ist, und $\mathfrak{S}$ ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $\mathfrak{A}$ halbeinfach ist.

5. Im allgemeinen enthält eine Jordan-Algebra kein Einselement, sie kann jedoch monomorph in eine Jordan-Algebra mit Eins eingebettet werden. Halbeinfache Jordan-Algebren besitzen stets ein Einselement. Ein von Null verschiedenes Idempotent u von $\mathfrak{A}$ heißt primitiv, wenn es nicht als Summe zweier von Null verschiedener Idempotente darstellbar ist, und es heißt absolut primitiv, wenn es in jeder Grundkörpererweiterung von $\mathfrak{A}$ primitiv bleibt, oder, was nach [2] dasselbe ist, wenn $xu=x$ nur für $x \in Ku$ möglich ist. Zwei Idempotente von $\mathfrak{A}$ sind orthogonal zueinander, wenn ihr Produkt verschwindet. Durch Polarisierung der Identität (J) bekommt man, daß orthogonale Idempotente stets vertauschbar sind. Ein r -Tupel $(e_1, \dots, e_r)$ bestehend aus von Null verschiedenen und paarweise orthogonalen Idempotenten ist ein vollständiges Orthogonalsystem von $\mathfrak{A}$, wenn $e_1 + \dots + e_r = e$, e das Einselement von $\mathfrak{A}$, gilt. Jedes vollständige Orthogonalsystem läßt sich zu einem vollständigen Orthogonalsystem primitiver Idempotente verlängern. Besonders gut zu klassifizieren sind Jordan-Algebren, die ein vollständiges Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotente enthalten, und die reduziert genannt werden (s.a. §4). Jedes vollständige Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotente einer zentral-einfachen reduzierten Jordan-Algebra hat dieselbe Anzahl von Elementen, dieselbe "Länge", die auch mit Grad der Algebra bezeichnet wird.

Dieser Begriff läßt sich auf beliebige zentral-einfache Jordan-Algebren verallgemeinern, denn jede zentral-einfache Jordan-Algebra kann durch Grundkörpererweiterung (spätestens beim algebraischen Abschluß) zu einer reduzierten Algebra gemacht werden.

6. Wie in der assoziativen Theorie gehört zu den wichtigsten Hilfsmitteln der Strukturuntersuchungen die Peirce-Zerlegung, die im Folgenden kurz skizziert wird. Durch Polarisierung der Identität (J) und Umschreiben in die linksreguläre Darstellung erhält man für ein Idempotent c von $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$L(c) - 3L^2(c) + 2L^3(c) = 0.$$

Das Minimalpolynom von $L(c)$ ist also ein Teiler des Polynoms

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(2\lambda-1),$$

das die einfachen Wurzeln 0, 1/2 und 1 hat. Demnach hat $L(c)$ höchstens diese Eigenwerte, und man kann den Vektorraum $\mathfrak{A}$ darstellen als

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(c) + \mathfrak{A}_{1/2}(c) + \mathfrak{A}_1(c),$$

wobei $\mathfrak{A}_\nu(c) = \{x \in \mathfrak{A} \mid L(c)x = cx = \nu x\}$ mit $\nu = 0, 1/2, 1$ ist.

Diese Zerlegung von $\mathfrak{A}$ nennt man die Peirce-Zerlegung bezüglich des Idempotents c , die $\mathfrak{A}_\nu$ heißen Peirce-Komponenten. Die Peirce-Komponenten haben folgende Eigenschaften:

(a) $\alpha_0(c)$ und $\alpha_1(c)$ sind Teilalgebren, die sich gegenseitig annullieren.

(b) $\alpha_{1/2}(c)\alpha_{1/2}(c) \subset \alpha_0(c) + \alpha_1(c)$.

(c) $\alpha_1(c)\alpha_{1/2}(c) \subset \alpha_{1/2}(c)$.

$\alpha_0(c)\alpha_{1/2}(c) \subset \alpha_{1/2}(c)$.

Betrachtet man die Zerlegung bezüglich eines vollständigen Orthogonalsystems, so bekommt man die folgende Aufspaltung des Vektorraums α :

$$\alpha = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij},$$

wobei $\alpha_{ij} = \{x \in \alpha \mid x e_i = x e_j = 1/2 x x\}$ für $i \neq j$,

$$\alpha_{ii} = \{x \in \alpha \mid x e_i = x\} = \alpha_1(e_i),$$

$(e_1, \dots, e_r)$ das vollständige Orthogonalsystem und $1 \leq i, j \leq r$ ist.

Analog den Eigenschaften der obigen Zerlegung gelten für diese Peirce-Zerlegung die folgenden Regeln:

(a) α_{ii} und α_{jj} sind Teilalgebren von α , die sich gegenseitig annullieren.

(b) $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ und es gilt $\alpha_{ij} = \alpha_{1/2}(e_i) \cap \alpha_{1/2}(e_j)$.

(c) $\alpha_{ii} \alpha_{ij} \subset \alpha_{ij}$ für $i \neq j$

(d) $\alpha_{ij} \alpha_{jk} \subset \alpha_{ik}$ für paarweise verschiedene i, j, k

(e) $\alpha_{ij} \alpha_{kl} = 0$ für paarweise verschiedene i, j, k, l .

(f) $\alpha_{ij}^2 \subset \alpha_{ii} + \alpha_{jj}$ für $i \neq j$.

Weitere aus den Eigenschaften der Peirce-Zerlegung fließende Identitäten finden sich bei Jacobson [9].

Im Falle eines vollständigen Orthogonalsystems absolut primitiver Idempotente vereinfachen sich die α_{ii} zu Ke_i , und für alle Elemente a, b aus einer Peirce-Komponenten α_{ij} gilt

$$abe \in K(e_i + e_j).$$

7. Zu einem $a \in \mathfrak{A}$ wird mit $K[a]$ die von a und allen Potenzen von a aufgespannte (assoziative) Algebra bezeichnet. a heißt invertierbar in $K[a]$, wenn es ein $b = p(a)$, $p(\tau) \in K(\tau)$, gibt mit $ab = e$. Ist in einer Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ (mit Einselement) jedes von Null verschiedene Element invertierbar, so heißt $\mathfrak{A}$ Jordan-Körper. Nach [5] ist eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ genau dann ein Jordan-Körper, wenn $\mathfrak{A}$ einfach und e das einzige Idempotent von $\mathfrak{A}$ ist. Ein Beispiel für einen Jordan-Körper ist die Algebra $\alpha_1(c)$ in der Peirce-Zerlegung bezüglich eines primitiven Idempotents.

Mit quadratischer Darstellung wird die Abbildung $P(x) := 2L^2(x) - L(x^2)$, $x \in \mathfrak{A}$, bezeichnet. Ist x invertierbar, so gilt $P^{-1}(x) = P(x^{-1})$. Für die quadratische Darstellung gilt die sogenannte Fundamentalformel $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ mit $x, y \in \mathfrak{A}$.

8. Die zugrundeliegenden Körper sind kommutativ und, von §5 abgesehen, von Charakteristik Null. Besondere Beachtung verdienen pythagoräische und euklidische Körper. Ein Körper heißt pythagoräisch, wenn er formal-reell ist und in ihm jede Summe von Quadraten

wieder ein Quadrat ist. Er heißt euklidisch, wenn er formal-reell ist und in ihm jedes Element oder sein Inverses Quadrat ist, oder, was dasselbe ist, wenn er formal-reell ist und genau zwei Quadratklassen besitzt ([4],[6],[13]). Euklidische Körper sind stets auch pythagoräisch.

§2. Pythagoräische Jordan-Algebren

1. Im folgenden Kapitel wollen wir den Begriff der pythagoräischen Jordan-Algebra einführen, einige ihrer Eigenschaften zusammenstellen und Beispiele angeben.

Definition: Eine endlich-dimensionale Algebra $\mathfrak{A}$ heißt

p y t h a g o r ä i s c h, wenn die beiden folgenden Axiome erfüllt sind:

(P1) $x^2 + y^2 = 0$ impliziert $x = y = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{A}$.

(P2) $x^2 + y^2$ ist wieder Quadrat in $\mathfrak{A}$ für alle $x, y \in \mathfrak{A}$.

Satz 1: Eine kommutative potenz-assoziative pythagoräische Algebra ist eine pythagoräische Jordan-Algebra.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative potenz-assoziative pythagoräische Algebra, und sei K ihr Grundkörper.

$\mathfrak{A}$ enthält keine nilpotenten Elemente, denn wäre x nilpotent mit $x^n = 0, x^{n-1} \neq 0$ für eine natürliche Zahl n , dann wäre wegen der Potenz-Assoziativität von $\mathfrak{A}$ $(x^{n-1})^2 + (x^{n-1})^2 = 0$, aber $x^{n-1} \neq 0$, im Widerspruch zu (P1) der Definition.

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, 0 \neq x \in \mathfrak{A}$. Gilt $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 0$, so folgt wegen (P1) (und (P2)) aus $(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2) x^2 = 0$ sofort

$\alpha_1 x = \alpha_2 x = \dots = \alpha_n x = 0$ und wegen $x \neq 0$ weiter $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

K ist also formal-reell.

Da in endlich-dimensionalen potenz-assoziativen Algebren das Radikal aus nilpotenten Elementen besteht, ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach. Von Albert [3] und Kokoris [12] wurde gezeigt, daß eine halbeinfache potenz-assoziative Algebra über einem Körper der Charakteristik Null stets eine Jordan-Algebra ist, und somit ist $\mathfrak{A}$ eine pythagoräische Jordan-Algebra.

2. Lemma 1: a) Die direkte Summe pythagoräischer Jordan-Algebren ist pythagoräisch.

b) Sei $\mathfrak{A}$ eine pythagoräische Jordan-Algebra, die sich als direkte Summe gewisser Jordan-Algebren $\mathfrak{A}_i$ darstellen läßt. Dann sind alle Jordan-Algebren $\mathfrak{A}_i$ selbst pythagoräisch.

Der Beweis von Lemma 1 folgt direkt aus der Tatsache, daß sich direkte Summanden gegenseitig annullieren.

Da halbeinfache Jordan-Algebren direkte Summen einfacher Jordan-Algebren sind, kann man sich auf die Untersuchung einfacher pythagoräischer Jordan-Algebren beschränken. Man kann sich sogar auf zentral-einfache Algebren beschränken, denn beim Übergang von der einfachen Jordan-Algebra auf die Jordan-Algebra über ihrem Zentrum geht die Pythagoräizität nicht verloren.

3. Aus dem Beweis von Satz 1 ist ersichtlich, daß der Grundkörper einer pythagoräischen Jordan-Algebra formal-reell ist. Es liegt nun nahe, danach zu fragen, unter welchen Bedingungen der Grundkörper pythagoräisch ist. Ein erstes Kriterium liefert der folgende

Satz 2: Ist das Zentrum einer einfachen Jordan-Algebra pythagoräisch, so ist ihr Grundkörper pythagoräisch.

Beweis: Das Zentrum einer einfachen Jordan-Algebra ist nach §1.3 ein Körper. Nach [6] ist bei Körpererweiterungen der Grundkörper pythagoräisch, wenn ein endlicher Erweiterungskörper pythagoräisch ist.

Im speziellen Falle der reduzierten Jordan-Algebren gilt

Satz 3: Der Grundkörper einer reduzierten pythagoräischen Jordan-Algebra ist pythagoräisch.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine reduzierte pythagoräische Jordan-Algebra und $(e_1, \dots, e_r)$ ein vollständiges Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotente von $\mathcal{A}$. Nach §1.6 ist in der zugehörigen Peirce-Zerlegung $\mathcal{A}_1(e_i) = K e_i, i=1, \dots, r$. Zu zeigen ist, daß $K e_i$ pythagoräisch ist:

(P1) überträgt sich auf die Unteralgebra $K e_i$.

Sei $\alpha e_i, \beta e_i \in K e_i$ mit $\alpha^2 e_i + \beta^2 e_i = \gamma e_i$. Die "Wurzel"

von $\{e_i\}$ liegt nicht in α_{ij} , da $a'_{ij} \in K(e_i + e_j)$ für $a_{ij} \in \alpha_{ij}$, und sie liegt nicht in $\alpha_{ii} + \alpha_{ij}$ oder in $\alpha_{ii} + \alpha_{ij} + \alpha_{jj}$, da hier Mischglieder in α_{ij} beim Quadrieren auftreten. Nach §1.6 bleibt lediglich Ke_i , und damit ist auch (P2) erfüllt.

4. In naheliegender Weise ist ein Homomorphismus φ zwischen zwei Jordan-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ als ein Vektorraum-Homomorphismus definiert, für den $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt. Die Ideale von $\mathfrak{A}$ sind genau die Kerne von Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ in ein $\mathfrak{A}'$. Obwohl die Eigenschaft (P1) bei homomorphen Abbildungen nicht erhalten wird, gilt daher dennoch

Satz 4: Das homomorphe Bild einer pythagoräischen Jordan-Algebra ist pythagoräisch.

Beweis: (P2) folgt direkt aus den Homomorphieeigenschaften, (P1) aus dem eben Gesagten und der Tatsache, daß pythagoräische Jordan-Algebren halbeinfach sind sowie aus Lemma 1.

Korollar: Die pythagoräischen Jordan-Algebren bilden eine volle Unterkategorie der Kategorie der Jordan-Algebren.

5. Die Menge $Q(\mathfrak{A}) = \{x \in \mathfrak{A} \mid \exists y \in \mathfrak{A} : y^2 = x\}$ der Quadrate einer Jordan-Algebra nennt man ihren Quadratbereich.

Auf einer pythagoräischen Jordan-Algebra kann man mit Hilfe ihres Quadratbereiches eine teilweise Ordnung " $>$ " definieren, bezüglich deren genau die Quadrate positiv sind:

Für $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt $a > b$ genau dann, wenn $a - b \in Q(\mathfrak{A}) \setminus \{0\}$ ist, und $a \geq b$ ist gleichbedeutend damit, daß $a - b$ aus $Q(\mathfrak{A})$ ist.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser teilweisen Ordnung stellen wir in dem folgenden Lemma zusammen.

Lemma 2: Sei $\mathfrak{A}$ eine pythagoräische Jordan-Algebra und $>$ bzw. $\geq$ die oben eingeführte Relation.

Für $x, y, z, v \in \mathfrak{A}, \alpha \in K$ gilt:

- (a) $x \geq x$.
- (b) Ist $x \geq y$ und $y \geq x$, so ist $x = y$.
- (c) Aus $x > y$ und $y > z$ folgt $x > z$, und aus $x \geq y$ und $y \geq z$ $x \geq z$.
- (d) Mit $\alpha \in Q(K) \setminus \{0\}$ und $x > y$ gilt $\alpha x > \alpha y$, und mit $\alpha \in Q(K)$ und $x \geq y$ gilt $\alpha x \geq \alpha y$.
- (d') Ist K euklidisch, und bezeichnet $>$ auch die Anordnung in K , so folgt aus $x > y$ und $\alpha > 0$ $\alpha x > \alpha y$, und aus $x \geq y$ und $\alpha \geq 0$ $\alpha x \geq \alpha y$.
- (e) Ist $x > y$ und $v \in \mathfrak{A}$, so ist $x + v > y + v$, und ist $x \geq y$, so gilt $x + v \geq y + v$.
- (f) Aus $x > y$ folgt $-y > -x$, und aus $x \geq y$ folgt $-y \geq -x$.

- (g) Ist φ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ in eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}'$, dann impliziert $x \succ y$ (bzw. $x \succcurlyeq y$) $\varphi(x) \succ \varphi(y)$ (bzw. $\varphi(x) \succcurlyeq \varphi(y)$) in der analog definierten Anordnung von $\mathfrak{A}'$.
- (h) $x \succ 0$ ist äquivalent damit, daß x in $Q(\mathfrak{A})$ liegt.

Die Eigenschaften (a)-(c) zeigen, daß " $\succ$ " eine teilweise Ordnung ist, (d')-(f) besagen, daß für euklidische Grundkörper die Ordnungsrelation mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, (g), daß Homomorphismen bezüglich der Anordnung isoton sind. Mit der Algebrenstruktur ist die Anordnung im allgemeinen nicht verträglich, denn wegen $a^2b^2 + (ab)^2$ ist das Produkt zweier Quadrate nicht notwendig ein Quadrat.

Die Beweise des Lemmas sind klar. Die Pythagoräizität von $\mathfrak{A}$ geht lediglich beim Beweis der Transitivität der Ordnungsrelation ein. Der Beweis von (g) folgt aus Satz 4.

6. Einige Beispiele pythagoräischer Jordan-Algebren:

- (1) Pythagoräische Körper sowie direkte Summen pythagoräischer Körper sind triviale Beispiele pythagoräischer Jordan-Algebren.
- (2) Sei $\mathfrak{A}$ eine assoziative pythagoräische Jordan-Algebra. Unter einem Jordan-Homomorphismus versteht man eine Abbildung j einer assoziativen

Algebra $\mathcal{A}$ in eine assoziative Algebra $\mathcal{A}'$ mit folgenden Eigenschaften:

$$i) \quad j(a+b)=j(a)+j(b),$$

$$ii) \quad j(\alpha a)=\alpha j(a)$$

$$iii) \quad j(a^2)=(j(a))^2$$

$$iv) \quad j(aba)=j(a)j(b)j(a) \quad \text{für } a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in K.$$

(siehe [9]). Sei j nun ein Jordan-Endomorphismus von $\mathcal{A}$. Dann ist das Bild unter j eine (spezielle) pythagoräische Jordan-Algebra.

- (3) Über einem pythagoräischen Körper K sei eine 3-dimensionale Algebra $\mathcal{A}$ definiert mit den Basisvektoren e_1, e_2 und a und der Multiplikation $e_1^2=e_1, e_2^2=e_2, e_1e_2=0=e_2e_1, e_1a=e_2a=1/2 \ a=ae_2=ae_1, a^2=e_1+e_2$.

$\mathcal{A}$ ist potenz-assoziativ und somit eine Jordan-Algebra. Für $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3a$ ist

$$x^2=(\alpha_1^2+\alpha_3^2)e_1+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)e_2+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)a.$$

Sei $y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3a$, dann ist zum Nachweis der Pythagoräizität von $\mathcal{A}$ das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\xi_1^2+\xi_3^2 = \alpha_1^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_3^2$$

$$\xi_2^2+\xi_3^2 = \alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_2^2+\beta_3^2$$

$$\xi_3(\xi_1+\xi_2) = \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)+\beta_3(\beta_1+\beta_2),$$

wobei $\alpha_i, \beta_i \in K, i=1,2,3$.

Da dieses Gleichungssystem in einem pythagoräischen Körper lösbar ist, ist $\mathcal{A}$ pythagoräisch.

- (4) Vollkommene sowie formal-reelle Jordan-Algebren sind Beispiele reduzierter pythagoräischer Jordan-Algebren. Beide werden im folgenden Kapitel behandelt.

§3. Vollkommene und formal-reelle Jordan-Algebren als Beispiele pythagoräischer Jordan-Algebren

1. Zu Beginn dieses Abschnitts soll die Minimalzerlegung eines Elements der Jordan-Algebra $\mathcal{A}$ (nach Braun-Koecher [5]) betrachtet werden. Es sei a aus $\mathcal{A}$, dann heißt ein Element ξ eines Erweiterungskörpers E von K ein Eigenwert zum Eigenvektor a , wenn es ein $b \in E[a]$ gibt mit $ab = \xi b$. Die Eigenwerte von a sind genau die Wurzeln des Minimalpolynoms $f(\tau)$ von a in einem geeigneten Erweiterungskörper des Grundkörpers K . Sei nun F der Körper, über dem das Minimalpolynom $f(\tau)$ von a in Linearfaktoren zerfällt. Dann findet man über F die folgende Minimalzerlegung von a :

$$a = \sum_i \xi_i c_i + v,$$

wobei die c_i ein vollständiges Orthogonalsystem bilden und v der nilpotente Teil von a ist. Die Minimalzerlegung ist eindeutig, bei Verlängerung zu einem vollständigen Orthogonalsystem primitiver Idempotente müssen Glieder mit gleichem ξ_i zusammengefaßt werden. Der nilpotente Anteil v von a verschwindet genau dann, wenn das Minimalpolynom von a nur einfache Nullstellen hat. Sind alle ξ_i von Null verschieden, so ist das gleichbedeutend damit, daß a in $K[a]$ invertierbar ist (vgl. §1.7). Die ξ_i sind genau die Eigen-

werte von a .

Betrachtet man nun die von $L(c_1), \dots, L(c_r)$ aufgespannte und (nach §1.6) kommutative Algebra $\mathcal{L}$, dann sind die $c_{kk} := P(c_k)$ und $c_{ik} := L(c_k)L(c_1) = c_{ki}$ zueinander orthogonale und zugleich alle primitiven Idempotenten der Algebra $\mathcal{L}$. Die Minimalzerlegung eines $B \in \mathcal{L}$ hat dann folgendes Aussehen:

$$B = \sum_{i,j} \eta_{ij} c_{ij},$$

wobei genau diejenigen η_{ij} als Eigenwerte auftreten, für die c_{ij} ungleich Null ist. Für $L(a)$ wird η_{ij} zu $1/2 (\xi_i + \xi_j)$ und η_{ii} zu ξ_i , wobei die ξ_i und ξ_j entsprechende Eigenwerte von a sind, während $P(a)$ die Eigenwerte $\eta_{ij} = \xi_i \xi_j$ hat.

Da wir es im allgemeinen mit angeordneten Körpern zu tun haben, ist es sinnvoll, den Begriff positiv definit anzuführen. Eine symmetrische Bilinearform τ von $\mathcal{A}$ mit Werten im Grundkörper K heißt positiv definit (bezüglich einer Anordnung von K), falls $\tau(a, a) > 0$ für alle $a \neq 0$ aus $\mathcal{A}$ gilt. Eine bezüglich τ selbstadjungierte lineare Transformation A heißt positiv definit, kurz $A > 0$, wenn $\tau(Ax, x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. (Beispielsweise ist $L(a)$ gegenüber $\tau(x, y) = \text{Sp } L(xy)$ selbstadjungiert.) Sind $\tau(x, x) \geq 0$ bzw. $\tau(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$, so nennt man τ bzw. A positiv semidefinit. Für ein $a \in \mathcal{A}$ schreibt man $a > 0$ bzw. $a \geq 0$ genau dann,

wenn alle Eigenwerte von a positiv bzw., nicht negativ sind.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich

Lemma 1: Für ein Element a einer halbeinfachen Jordan-Algebra über einem angeordneten Körper K ist $a \succ 0$ mit $L(a) \succ 0$ und $a \succeq 0$ mit $L(a) \succeq 0$ gleichbedeutend.

Lemma 1 wurde in [5], Kap.XI, für formal-reelle Jordan-Algebren bewiesen.

Lemma 2: Alle Elemente einer pythagoräischen Jordan-Algebra haben nur reelle Eigenwerte.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine pythagoräische Jordan-Algebra.

Der Grundkörper von $\mathfrak{A}$ werde zum reellen Abschluß R erweitert. Wir betrachten ein $a \in \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}_R$. Das Minimalpolynom von a ist gegenüber Grundkörpererweiterungen invariant, es hat deshalb nach [5], Lemma XI,3.1 nur reelle Eigenwerte.

2. Von Helwig [7] stammt die

Definition 1: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ über K heißt v o l l k o m m e n, wenn sie die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(V1) Jede Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist halbeinfach.

(V2) Jede einfache assoziative Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist eindimensional.

Für uns sind die nachstehenden beiden in [7] bewiesenen Sätze von Bedeutung:

Satz 1: Für eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ mit einem Einselement e sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\mathfrak{A}$ ist vollkommen.
- b) Zu jedem $x \in \mathfrak{A}$ existiert ein vollständiges Orthogonalsystem $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathfrak{A}$ mit $x \in K(e_1, \dots, e_r)$.

Nach Satz 1 sind die vollkommenen Jordan-Algebren also genau diejenigen, in denen die Minimalpolynome aller Elemente schon über dem Grundkörper in Linearfaktoren zerfallen. Aus Satz 1 folgert man nach [7] ferner, daß eine vollkommene Jordan-Algebra reduziert ist.

Satz 2: Der Grundkörper einer vollkommenen Jordan-Algebra ist pythagoräisch.

Korollar: In einer vollkommenen Jordan-Algebra hat jedes Quadrat nur positive Eigenwerte.

Lemma 3: In einer vollkommenen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ ist für ein $a \in \mathfrak{A}$ $L(a) \gg 0$ genau dann, wenn $\epsilon(L(a)x, x) \gg 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}$ gilt.

Dabei bedeutet $L(a) \gg 0$, daß $L(a) > 0$ bezüglich jeder Anordnung des Grundkörpers ist, d.h. $L(a)$ hat nur Quadrate als Eigenwerte genau dann, wenn $\epsilon(L(a)x, x)$ für alle $x \in \mathfrak{A}$ Quadrat ist.

Beweis von Lemma 3:

1. Sei $\mathfrak{A}$ eine vollkommene Jordan-Algebra und e ihr Einselement. Die Form φ ist auf $\mathfrak{A}$ positiv definit, denn es gilt (vgl. [7])

$$(*) \quad \varphi(x, x) = \sum_1^2 \varphi(e, e_1) + \dots + \sum_r^2 \varphi(e, e_r) \quad \text{für } x \in \mathfrak{A},$$

$$x = \sum_1 e_1 + \dots + \sum_r e_r \quad \text{in der Darstellung von } x$$

gemäß Satz 1b.

$\varphi(e, e_i)$ ist Quadrat in K , denn es ist $\varphi(e, e_i) = \text{Sp } L(e_i)$, und jedes $L(e_i)$ hat bezüglich einer Peirce-Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1(e_i) + \mathfrak{A}_{1/2}(e_i) + \mathfrak{A}_0(e_i)$ eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\text{diag } (L(e_i)) = \{1, \dots, 1, 1/2, \dots, 1/2, 0, \dots, 0\},$$

wobei die Anzahl der Einsen die Dimension von $\mathfrak{A}_1(e_i)$, die der Zahlen $1/2$ die Dimension von $\mathfrak{A}_{1/2}(e_i)$ ist.

Demnach gilt $\varphi(e, e_i) = \dim \mathfrak{A}_1(e_i) + 1/2 \dim \mathfrak{A}_{1/2}(e_i)$.

Da nach Satz 2 der Grundkörper K pythagoräisch ist, liegen in $(*)$ nur Summen und Produkte von Quadraten vor, $\varphi(x, x)$ ist mithin Quadrat und damit in jeder Anordnung von K positiv.

2. Sei $a \in \mathfrak{A}$. Daß aus $\varphi(L(a)x, x) \gg 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}$ $L(a) \gg 0$ folgt, ist klar. Zum Nachweis der Umkehrung wird $L(a)$ auf Diagonalgestalt gebracht, was möglich ist, da alle Eigenwerte von $L(a)$ bereits in K liegen. Die Diagonale enthält nur Quadrate, und aus der Bilinearität von φ sowie aus Teil 1. des Beweises folgt die Behauptung.

Folgerung: Für zwei Elemente a, b aus dem Quadratbereich $Q(\mathfrak{A})$ einer vollkommenen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{S}(a, b) \gg 0$.

Beweis: Sei $a = v^2$ aus der vollkommenen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{S}(a, b) = \mathfrak{S}(v^2, b) = \mathfrak{S}(L(b)v, v)$.

Satz 3: Für den Quadratbereich $Q(\mathfrak{A})$ einer vollkommenen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Grundkörper K gilt

$$Q(\mathfrak{A}) = \{x \in \mathfrak{A} \mid L(x) \gg 0\}.$$

Beweis: Sei zunächst $x \in Q(\mathfrak{A})$ mit $x^2 = x$. Dann gilt (vgl. §1.6) $L(x) - 3L^2(x) + 2L^3(x) = 0$, und $L(x)$ hat die Eigenwerte $0, 1/2$ und 1 , also gilt $L(x) \gg 0$.

Sei $x \in Q(\mathfrak{A})$ mit $x = y^2$ für ein $y \in \mathfrak{A}$. Gemäß Satz 1 gibt es ein vollständiges Orthogonalsystem $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathfrak{A}$ mit $y = \sum_{i=1}^r \eta_i e_i$, $\eta_i \in K$. Dann ist $x = \sum_{i=1}^r \eta_i^2 e_i$, x hat also nur bezüglich jeder Anordnung von K positive Eigenwerte, und aus Lemma 1 folgt $L(x) \gg 0$.

Sei umgekehrt $x \in \mathfrak{A}$ mit $L(x) \gg 0$. Dann ist $x = \sum_{i=1}^r \xi_i e_i$ mit einem vollständigen Orthogonalsystem $(e_1, \dots, e_r)$. Die Eigenwerte ξ_i sind nach Voraussetzung und nach Lemma 1 Quadrate. Somit ist $y := \sum_{i=1}^r \sqrt{\xi_i} e_i$ eine "Wurzel" aus x , das Element x ist also aus $Q(\mathfrak{A})$.

Satz 4: Eine vollkommene Jordan-Algebra ist pythagoräisch.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine vollkommene Jordan-Algebra über K und seien $a=u^2$ und $b=v^2$ aus $\mathfrak{A}$. Wegen der Linearität von L gilt $\mathfrak{s}(L(a)z, z) + \mathfrak{s}(L(b)z, z) = \mathfrak{s}(L(a+b)z, z)$ für alle $z \in \mathfrak{A}$. Aus Lemma 3 und Satz 3 folgt $\mathfrak{s}(L(a)z, z) \geq 0$ und $\mathfrak{s}(L(b)z, z) \geq 0$, also auch $\mathfrak{s}(L(a+b)z, z) \geq 0$. Wiederum aus Satz 3 und Lemma 3 schließt man daraus, daß $a+b$ zu $Q(\mathfrak{A})$ gehört, und (P2) ist somit erfüllt. Zum Nachweis von (P1) sei $a^2+b^2=0$ für $a, b \in \mathfrak{A}$. Es folgt $\mathfrak{s}(a^2+b^2, e) = \mathfrak{s}(a^2+b^2) = \mathfrak{s}(a^2) + \mathfrak{s}(b^2) = \mathfrak{s}(a, a) + \mathfrak{s}(b, b) = 0$. Der Beweis von Lemma 3 zeigt, daß $\mathfrak{s}(a, a)$ und $\mathfrak{s}(b, b)$ Quadrate in K sind, und da K insbesondere formalreell ist, erhält man $\mathfrak{s}(a, a) = \mathfrak{s}(b, b) = 0$. Die Nichtausgeartetheit von $\mathfrak{s}$ impliziert schließlich $a=b=0$.

Folgerung: Sei $\mathfrak{A}$ vollkommen über K und $\dot{Q}(\mathfrak{A}) =: \{x \in \mathfrak{A} \mid L(x) \neq 0\}$.

Dann gilt:

- a) Ein $x \in Q(\mathfrak{A})$ liegt genau dann in $Q(\mathfrak{A})$, wenn in der Minimalzerlegung von x für alle Eigenwerte λ_i gilt $\lambda_i \neq 0$.
- b) Zu $x \in Q(\mathfrak{A})$ gibt es ein $y \in \dot{Q}(\mathfrak{A})$ derart, daß $y^2 = x$ ist.

3. Von Jordan, v. Neumann und Wigner wurde in [10] der folgende Begriff geprägt:

Definition 2: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ heißt f o r m a l - r e e l l, wenn für alle $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt:

(F) Aus $a^2+b^2=0$ folgt $a=b=0$.

Für die Beziehungen zwischen formal-reellen, vollkommenen und pythagoräischen Jordan-Algebren gilt der folgende, einen Satz aus [7] erweiternde,

Satz 5: Über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind für eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\mathfrak{A}$ ist formal-reell.
- b) $\mathfrak{A}$ ist vollkommen.
- c) $\mathfrak{A}$ ist pythagoräisch.

Beweis: Daß aus b) sich c) ergibt, zeigt Satz 4, und daß a) aus c) folgt, ist trivial. Es bleibt der Fall, daß mit a) auch b) gilt:

Die Beziehung (V1) ist äquivalent damit, daß $\mathfrak{A}$ keine echten nilpotenten Elemente enthält, was aus a) direkt folgt.

Eine einfache assoziative Unteralgebra $\mathfrak{B}$ ist isomorph zu einem endlichen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der aber nur der komplexe Zahlkörper $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ selbst sein kann. $\mathbb{C}$ fällt weg, da $\mathbb{C}$ nicht formal-reell ist, und damit ist (V2) erfüllt.

4. Mit der Folgerung zu Satz 4 haben wir Anschluß an die Arbeit [8] von Ch. Hertneck hergestellt. Dort wurde bewiesen, daß in einer formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ $\dot{Q}(\mathfrak{A})$ der bezüglich der $\mathbb{R}^n$ -Topologie offene Kern des Quadratbereiches von $\mathfrak{A}$ ist, und daß $\dot{Q}(\mathfrak{A})$

einen homogenen Positivitätsbereich bildet.

Das Konzept des Positivitätsbereiches läßt sich in der folgenden Weise auf Vektorräume über euklidischen Körpern erweitern: Sei $(K, \leq)$ ein euklidischer Körper mit der Anordnung $\leq$. Die Intervalle $(a, b) = \{x \in K \mid a < x < b\}$ bilden die offenen Mengen einer Topologie, der sogenannten Intervalltopologie. Mit Hilfe der Produkttopologie wird der Vektorraum K^n zum topologischen Raum.

Definition 3: Eine Teilmenge Y des K^n heiße Positivitätsbereich bezüglich einer positiv definiten Bilinearform τ , wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(PB1) Y ist offen und nicht leer.

(PB2) Für $x, y \in Y$ gilt $\tau(x, y) > 0$.

(PB3) Für $x \notin Y$ gibt es ein $y \in \bar{Y}$ mit $\tau(x, y) \leq 0$.

Dabei bezeichnet $\bar{Y}$ die abgeschlossene Hülle von Y .

Im Falle $K = \mathbb{R}$ stimmt die obige Definition mit der in [8] gegebenen überein.

Satz 6: Sei $\mathfrak{A}$ eine vollkommene Jordan-Algebra über einem euklidischen Grundkörper K . Dann bildet die Menge $\dot{Q}(\mathfrak{A})$ einen Positivitätsbereich bezüglich der Bilinearform $\tau(x, y) = \text{Sp } L(xy)$.

Beweis:

(PB1) $\dot{Q}(\mathfrak{A})$ ist offen, da alle $x \in \dot{Q}(\mathfrak{A})$ nur positive

Eigenwerte haben, und $\dot{Q}(\alpha)$ ist nicht leer, denn das Einselement e gehört zu $\dot{Q}(\alpha)$.

(PB2) ist die Folgerung aus Lemma 3.

(PB3) Sei $x \in \dot{Q}(\alpha)$, dann hat x wegen Satz 1 nicht nur positive Eigenwerte, und wegen Lemma 3 gibt es ein $z \in \mathfrak{A}$ mit $\tau(L(x)z, z) \neq 0$. Es gilt aber $\tau(L(x)z, z) = \tau(x, z^2)$, und z^2 gehört zu $\overline{Q}(\alpha)$. Wie in [8] schließt man, daß $\overline{Q}(\alpha) = Q(\alpha)$ gilt.

Im Positivitätsbereich Y läßt sich eine Zerlegung durchführen analog der in [8] angegebenen:

$(Y_1, \dots, Y_m)$ heißt Zerlegung von Y , wenn

- (1) Y_k ein Positivitätsbereich in einem linearen Teilraum U_k von K^n ist,
- (2) $\overline{Y} = \sum_{k=1}^m \overline{Y}_k$ gilt,
- (3) für $y_i \in Y_i$, $y_j \in Y_j$ stets $\tau(y_i, y_j) = 0$ ist.

Damit läßt sich der nachstehende, zu [8] analoge Satz formulieren, dessen Beweis nahezu wortwörtlich übertragen werden kann, da er von den Eigenschaften einer formal-reellen Jordan-Algebra nur von der in Satz 1 angeführten Gebrauch macht.

Satz 7: a) Sei $\mathfrak{A}$ eine vollkommene Jordan-Algebra über einem euklidischen Grundkörper K , und sei $\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k$. Dann gilt

$$\dot{Q}(\alpha) = \sum_{k=1}^m \dot{Q}(\alpha_k)$$

b) Sei Y ein Positivitätsbereich mit $Y = \dot{Q}(\alpha)$ für eine vollkommene Jordan-Algebra α über euklidischem Grundkörper K , und sei $(Y_1, \dots, Y_m)$ eine Zerlegung von Y mit zugehörigen Teilräumen $U_1, \dots, U_m$. Dann induziert α in $U_k, 1 \leq k \leq m$, eine vollkommene Unter algebra α_k von α mit $Y_k = \dot{Q}(\alpha_k)$, und es gilt

$$\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k.$$

Wie im formal-reellen Fall entsprechen auch in vollkommenen Jordan-Algebren über euklidischem Grundkörper einander die unzerlegbaren Bestandteile des durch den Quadratbereich bestimmten Positivitätsbereiches und die einfachen Ideale.

Sei x aus $\dot{Q}(\alpha)$. Dann ist x invertierbar, da Null nicht als Eigenwert von x auftritt. Mit $T(\alpha)$ werde die Gruppe bezeichnet, die von allen $P(x)$ erzeugt wird, bei denen Null nicht als Eigenwert vorkommt.

Lemma 4: In einer vollkommenen Jordan-Algebra α wirkt $T(\alpha)$ transitiv auf $\dot{Q}(\alpha)$.

Beweis: Seien $x, y \in \dot{Q}(\alpha)$ mit $x = u^2$ und $y = v^2$, und sei e das Einselement von α . Es gilt

$$P(u^{-1})x = 2(u^{-1}(u^{-1}u^2)) - (u^{-2}u^2) = e$$

$$\text{und} \quad P(v)e = 2v(ve) - v^2e = v^2 = y,$$

$$\text{also} \quad P(v)(P(u^{-1})x) = y,$$

d.h. $T(\alpha)$ wirkt transitiv auf $\dot{Q}(\alpha)$.

Ein Positivitätsbereich Y heißt homogen, wenn die lineare Automorphismengruppe $\text{Aut}(Y)$ von Y transitiv auf Y wirkt.

Der Positivitätsbereich $\dot{Q}(\alpha)$ ist also homogen, wenn für alle x aus $\dot{Q}(\alpha)$ $P(x)$ in $\text{Aut}(\dot{Q}(\alpha))$ liegt. In formal-reellen Jordan-Algebren ist das der Fall, man schließt es daraus, daß dort $\dot{Q}(\alpha)$ zusammenhängend ist.

Lemma 4 wird zum Beweis des nächsten Satzes benötigt, der sich ansonsten wiederum aus [8] übertragen läßt, wenn man berücksichtigt, daß sich euklidische Körper bezüglich der Kongruenzrelation analog verhalten wie der reelle Zahlkörper.

Satz 8: Sei α eine einfache vollkommene Jordan-Algebra über einem euklidischen Grundkörper K , und sei $\dot{Q}(\alpha)$ ein homogener Positivitätsbereich.

Ist dann $\mathcal{B}$ eine vollkommene Jordan-Algebra mit $\dot{Q}(\mathcal{B}) = \dot{Q}(\alpha)$, so gilt für alle $x, y \in \mathcal{B}$
 $x \cdot y = \lambda x \cdot y$ mit $0 < \lambda \in K$, $x, y \in \alpha$.

Dabei bedeutet " $\cdot$ " die Multiplikation in $\mathcal{B}$, " $\cdot$ " diejenige in α . Einfache vollkommene Jordan-Algebren über euklidischem Grundkörper sind also durch ihren Quadratbereich bereits bis auf ein positives Vielfaches bestimmt, sofern der durch ihn bestimmte Positivitätsbereich homogen ist.

5. Die Analogie zwischen formal-reellen und pythagoräischen Jordan-Algebren kann man auch auf unendlich-dimensionale Algebren ausdehnen, wenn man die Begriffe Positivitätsbereich und formal-reell im Sinne von Janssen [11] erweitert und die Definition der pythagoräischen Jordan-Algebra sinngemäß auf den unendlich-dimensionalen Fall verallgemeinert. Analog zu Satz 6 bildet der offene Kern des Quadratbereiches einer unendlich-dimensionalen formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ einen Positivitätsbereich, und ein Positivitätsbereich ist ein konvexer Kegel. Daraus folgt, daß in $\mathfrak{A}$ die Summe zweier Quadrate wieder ein Quadrat ist. Eine gemäß [11] definierte formal-reelle Jordan-Algebra besitzt eine positiv definite assoziative Bilinearform $\mathfrak{s}$. Sei $u^2 + v^2 = 0$ für $u, v \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\mathfrak{s}(u, u) + \mathfrak{s}(v, v) = \mathfrak{s}(e, u^2 + v^2) = 0$, und somit $u = v = 0$. Auch eine unendlich-dimensionale formal-reelle Jordan-Algebra ist also pythagoräisch.

§4. Reduzierte pythagoräische Jordan-Algebren

1. Reduzierte Jordan-Algebren wurden von A.A.Albert in [2], Kap.16-18, untersucht und in der folgenden Weise dargestellt:

Sei $\mathfrak{A}$ eine reduzierte zentral-einfache Jordan-Algebra über einem Körper K der Charakteristik Null. Ferner sei t ihr Grad, d.h. die Länge eines (und damit aller) vollständigen Orthogonalsystems absolut primitiver Idempotente (vgl.§1.5). Man unterscheidet die Fälle $t=1$, $t=2$ und $t \geq 3$.

1.Fall: $t=1$. Dann ist $\mathfrak{A}$ isomorph zu Ke .

2.Fall: $t=2$. $\mathfrak{A}$ ist isomorph zu einer Algebra (V, τ) , wobei V ein K -Vektorraum der Dimension >1 und τ eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform ist. Im Vektorraum $Ke \oplus V$ ist die folgende Multiplikation erklärt:

$$(\alpha e + x)(\beta e + y) = (\alpha\beta + \tau(x, y))e + \alpha y + \beta x, \quad \alpha, \beta \in K, x, y \in V,$$

mit der (V, τ) eine Jordan-Algebra wird (s.a. Beispiel (3) in 2.6).

3.Fall: $t \geq 3$. Zu einem Körper F der Charakteristik Null werden Kompositionsalgebren mit Involution F_m in der folgenden Weise konstruiert: Es sei F_2 ein quadratischer Erweiterungskörper von F , F_4 eine Quaternionenalgebra und F_8 eine Cayley-Algebra über F .

Dabei sei $e=e_1, \dots, e_m$, $m=1, 2, 4$ oder 8 , eine Basis von F_m mit der Multiplikationstabelle

$e_i e_j = -e_j e_i$, $e_i e_j = \pm e_k$, $e_1^2 = -e_1$, $e_i e_1 = e_i = e_1 e_i$ mit $1 \leq i, j, k \leq m$ und $i \neq j$.

Die verallgemeinerten bezüglich der Involution Hermiteschen Matrizen mit Koeffizienten in F_m sind hinsichtlich der Multiplikation

$$(*) \quad a \cdot b = 1/2 (ab + ba),$$

wobei ab das übliche Matrizenprodukt der Hermiteschen Matrizen a und b bedeutet, abgeschlossen. Sie werden damit zu einer kommutativen Algebra, die mit $\mathcal{A}_r^+(F_m)$ bezeichnet wird, und die für $r \geq 3$ und $m=1, 2, 4$ sowie für $r=3$ und $m=8$ eine Jordan-Algebra ist.

Sei nun $(e_1, \dots, e_t)$ ein vollständiges Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotenten der Jordan-Algebra $\mathcal{A}$ und sei $\sum_{i \neq j} \mathcal{A}_{ij}$ die zugehörige Peirce-Zerlegung. Nach [2] haben alle Peirce-Komponenten $\mathcal{A}_{ij}$ mit $i \neq j$ dieselbe Dimension (es kommen nur $1, 2, 4$ und 8 vor). Wir betrachten exemplarisch die Unteralgebra

$\mathcal{A}_{ii} + \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{jj}$, $i, j \in \{1, \dots, t\}$ mit Einselement $e_i + e_j$, die eine reduzierte Jordan-Algebra vom Grad 2 ist.

Sei $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine Basis von $\mathcal{A}_{ij}$, und sei $x \in \mathcal{A}_{ij}$ mit $x = \xi_1 u_1 + \dots + \xi_m u_m$, $\xi_i \in K$, dann ist wegen $x^2 = \alpha(e_i + e_j)$ $\alpha =: f(x)$ eine quadratische Form in $\xi_1, \dots, \xi_m$. Diese Form kann auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$(\xi_1 u_1 + \dots + \xi_m u_m)^2 = \alpha_1 \xi_1^2 + \dots + \alpha_m \xi_m^2.$$

In einem geeigneten Erweiterungskörper E von K , der die Wurzeln der α_i enthält, erhält die quadratische Form f durch Basistransformation auf $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ die Gestalt

$$(1) \quad f(x) = \sum_1^2 + \dots + \sum_m^2$$

mit $x = \sum_1 u'_1 + \dots + \sum_m u'_m$ und $x^2 = f(x)(e_i + e_j)$.

Damit die quadratische Form $f(x)$ eine Verknüpfung gestattet, d.h. damit für $x, y \in \alpha_{ij}$

$$f(x)f(y) = f(z)$$

gilt mit einem $z \in \alpha_{ij}$, muß nach [2] folgende Bedingung

(2) erfüllt sein: Sei P eine m -reihige quadratische Matrix mit Koeffizienten in K , sei ferner P' die Transponierte zu P und $PP' = \lambda I$, wobei $\lambda \in K$ und I die $(m$ -reihige) Einheitsmatrix sind. Dann muß K alle Wurzeln der Form $\sqrt{\lambda}$ enthalten.

Erfüllt der Erweiterungskörper E die Bedingungen (1) und (2), so ist die Algebra $\alpha_{K,E} =: \alpha_E$ isomorph zu der Jordan-Matrixalgebra $\mathfrak{A}_r^+(E_m)$. Durch den Isomorphismus wird jedes Element e_i des vollständigen Orthogonalsystems $(e_1, \dots, e_t)$ auf eine Diagonalmatrix E_i abgebildet, die eine 1 in der i -ten Zeile und sonst nur Nullen enthält.

2. Es sei α eine reduzierte zentral-einfache pythagoräische Jordan-Algebra und $(e_1, \dots, e_r)$ ein voll-

ständiges Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotente von $\mathfrak{A}$. Nach Satz 2.3 ist der Grundkörper von $\mathfrak{A}$ pythagoräisch und erfüllt somit die Bedingung (2), da, wie man sofort nachrechnet, λ eine Summe von Quadraten ist.

Wir wollen die stärkere Voraussetzung machen, daß der Grundkörper K euklidisch ist. Im Vektorraum $\mathfrak{A}_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq r$) kann man stets eine Basis $\{u_k\}$ finden mit $u_k u_l = \delta_{kl} u_k$ und $u_k^2 = \alpha_k (e_i + e_j)$. Die α_k müssen ungleich Null sein nach §2.1, und sie müssen sogar positiv sein, denn wäre ein $\alpha_k < 0$, so wäre $\alpha_k (e_i + e_j) + (-\alpha_k) (e_i + e_j) = 0$ mit $\alpha_k (e_i + e_j) = u_k^2$ und $(-\alpha_k) (e_i + e_j) = (\sqrt{-\alpha_k} (e_i + e_j))^2$ im Widerspruch zu (P2). Da K euklidisch ist, können wir sogar eine Basis $\{u'_k\}$ finden, für die $u'_k u'_l = \delta_{kl} u'_k$ und $u'^2_k = e_i + e_j$ gilt (siehe z.B. [13]). Bezüglich dieser Basis erhält die Form $f(x)$ aus der Gleichung $x^2 = f(x)(e_i + e_j)$ die Gestalt

$$f(x) = \{1\}^2 + \dots + \{m\}^2.$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1: Eine reduzierte zentral-einfache pythagoräische Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ über einem euklidischen Grundkörper K vom Grade $r \geq 3$ ist isomorph zur Jordan-Matrixalgebra $\mathfrak{A}_r^+(K_m)$.

3. Dieses Ergebnis läßt sich noch etwas verallgemeinern. Dazu benötigen wir die nachstehende

Definition [5]: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement e heißt regulär bezüglich eines vollständigen Orthogonalsystems (nicht notwendig absolut primitiver Idempotente) $(e_1, \dots, e_r)$, wenn es in jedem $\mathfrak{A}_{1i}$, $i=2,3,\dots,r$, ein Element e_{1i} gibt derart, daß

$$e_{1i}^2 = 4(e_1 + e_i)$$

gilt.

In [5] werden die reduzierten regulären zentral-einfachen Jordan-Algebren $\mathfrak{A}$ in der folgenden Weise klassifiziert (für Grad $\mathfrak{A} \geq 3$):

$\mathfrak{A}$ ist entweder

- (1) zu einer vollen Matrixalgebra mit der Multiplikation $(*) \mathfrak{M}_r^+(K)$ mit Koeffizienten in K isomorph, oder
- (2) zu einer Algebra $\mathfrak{A}_r^+(\mathfrak{C})$ isomorph, wo $\mathfrak{C}$ gleich K , ein quadratischer Erweiterungskörper von K , eine Quaternionenalgebra oder (für Grad $\mathfrak{A}=3$) eine Cayley-Algebra über K sein kann. Dabei haben jedoch die Kompositionsalgebren $\mathfrak{C}$ im allgemeinen nicht die einfache Form K_m aus 4.1.

Im Falle pythagoräischer Jordan-Algebren fällt der Fall $\mathfrak{M}_r^+(K)$ weg, da in dieser Algebra nicht aus

$x^2+y^2=0$ stets $x=y=0$ folgt, es kommen also nur die unter (2) genannten Algebren vor. Beispiele für reguläre pythagoräische zentral-einfache Jordan-Algebren sind die einfachen vollkommenen Jordan-Algebren, wie man aus [7] schließen kann.

§5. Euklidische Jordan-Algebren

1. Von der Geometrie her motiviert, hat man in der Körpertheorie den Begriff euklidisch eingeführt. In analoger Weise sollen hier euklidische Jordan-Algebren definiert werden, wobei wir zwischen euklidischen und schwach euklidischen Jordan-Algebren unterscheiden wollen:

Definition 1: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt e u k l i d i s c h, wenn sie die beiden folgenden Axiome erfüllt:

- (E1) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}$ folgt aus $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ stets $x_i = 0$, $i=1, \dots, n$.
- (E2) Für jedes $x \in \mathfrak{A}$ gilt: Entweder x oder $-x$ ist Quadrat in $\mathfrak{A}$.

Definition 2: Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt s c h w a c h e u k l i d i s c h, wenn folgendes gilt:

- (SE1) Für alle $x \neq 0$ gilt $x^2 \neq 0$
- (SE2) Für jedes $x \in \mathfrak{A}$ gilt: Entweder x oder $-x$ ist Quadrat in $\mathfrak{A}$.

Satz 1: Eine schwach euklidische Jordan-Algebra ist ein Jordan-Körper.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine schwach euklidische Jordan-Algebra. Aus (SE1) der Definition 2 folgt sofort,

daß $\mathfrak{A}$ halbeinfach und somit direkte Summe einfacher Ideale $\mathfrak{A}_i$ ist. Diese einfachen Ideale sind schwach euklidisch, aber für zwei Quadrate e_i und e_j aus verschiedenen Idealen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ ist weder $e_i - e_j$ noch $e_j - e_i$ Quadrat. $\mathfrak{A}$ ist also einfach.

Sei nun $(c_1, \dots, c_r)$ ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente und $\sum_{i \neq j} \mathfrak{A}_{ij}$ die zugehörige Peirce-Zerlegung. Dann sind alle $\mathfrak{A}_{ii}$ Jordan-Körper, und für alle $i \neq j$ ist $\mathfrak{A}_{ij}$ leer, denn aus den Regeln der Peirce-Zerlegung folgt sofort, daß kein $a \in \mathfrak{A}_{ij}$, $i \neq j$, Quadrat sein kann. Damit ist aber, für $i > 1$, jedes $\mathfrak{A}_{ii}$ Ideal in $\mathfrak{A}$, die Länge r des Orthogonalsystems folglich gleich 1, und $\mathfrak{A}$ ist ein (schwach euklidischer) Jordan-Körper.

Nach einem Satz von Albert (siehe z.B. [14], Kap. V, 2) ist ein endlicher Jordan-Körper ein endlicher Körper. Das führt zu

Folgerung 1: Jede endliche schwach euklidische Jordan-Algebra ist ein endlicher schwach euklidischer Körper.

Beispiele hierfür sind die Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Mit den Regeln der Peirce-Zerlegung (§1.6) gilt ferner

Folgerung 2: Eine reduzierte schwach euklidische Jordan-Algebra ist ein schwach euklidischer Körper.

Satz 2: Die einzige schwach euklidische Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ selbst.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine schwach euklidische Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$, und seien $x, y \in \mathfrak{A}$. Es gelte $x^2 + y^2 = 0$, also $x^2 = -y^2$. Wären x und y ungleich null, so wäre im Widerspruch zu (SE2) y^2 und $-y^2$ Quadrat in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ ist also formal-reell und somit reduziert. Folgerung 2 zu Satz 1 ergibt nun die Behauptung.

Für den Fall der Dimension 3 läßt sich Satz 2 auch auf andere Weise beweisen: τ sei eine symmetrische Bilinearform und (V, τ) die in §4.1 eingeführte Jordan-Algebra. Ist $\tau(x, x)$ für alle $x \in V$ kein Quadrat im Grundkörper von V , so ist die Algebra (V, τ) sogar ein Jordan-Körper. Über $\mathbb{R}$ gilt das folgende

Lemma 1: a) Der einzige 3-dimensionale Jordan-Körper über $\mathbb{R}$ ist vom Typ (V, τ) , wobei τ eine negativ definite Bilinearform ist.

b) (V, τ) ist über $\mathbb{R}$ nicht schwach euklidisch.

Beweis:

a) Sei $\mathfrak{A}$ ein 3-dimensionaler Jordan-Körper über $\mathbb{R}$.

Dann muß $\mathfrak{A}$ Nullteiler enthalten, denn $\mathfrak{A}$ ist flexibel, und flexible Divisionsalgebren treten über $\mathbb{R}$ nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 auf.

$\mathfrak{A}$ enthält ein Einselement e , es gibt also eine

Basis $\{e, a, b\}$ mit $e^2 = e$, $ea = a$, $eb = b$, $ab = 0$,

$a^2 = \xi_1 e + \xi_2 a + \xi_3 b$, $b^2 = \eta_1 e + \eta_2 a + \eta_3 b$, $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$.

Man errechnet, daß in allen Fällen außer dem oben angeführten mehr als ein Idempotent auftritt, $\mathfrak{A}$ mithin kein Jordan-Körper ist.

b) Es läßt sich leicht nachrechnen, daß in (V, τ) sowohl e als auch $-e$ als Quadrat auftreten.

2. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra. Zu gegebenem a werde eine neue Multiplikation definiert:

$$(*) \quad u \underset{a}{\cdot} v := u(va) + v(ua) - (uv)a \quad \text{für } u, v \in \mathfrak{A}.$$

Man bezeichnet mit $\mathfrak{A}_a$ den Vektorraum $\mathfrak{A}$ mit dieser neuen Multiplikation und nennt ihn eine Mutation der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$. Eine Mutation ist stets wieder eine Jordan-Algebra, die jedoch im allgemeinen nicht isomorph zur ursprünglichen Jordan-Algebra ist. Auf $\mathfrak{A}$ wird noch eine neue Abbildung eingeführt:

$$P(u, v) := L(u)L(v) + L(v)L(u) - L(uv) \quad \text{für } u, v \in \mathfrak{A}.$$

Mit der quadratischen Darstellung $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$, $x \in \mathfrak{A}$, erhält man die folgende Identität ([5], Kap.V):

$$(**) \quad P(P(x)u, P(x)v) = P(x)P(u, v)P(x),$$

und damit für die Multiplikation der Mutation $\mathfrak{A}_a$:

$$(*) \quad u \underset{\mathfrak{A}_a}{\cdot} v = P(u, v)a.$$

Für schwach euklidische Jordan-Algebren und ihre Mutationen gilt der folgende

Satz 3: In einer schwach euklidischen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ sind alle Mutationen entweder isomorph oder antiisomorph zu $\mathfrak{A}$, und zwar ist für $0 \neq a \in Q(\mathfrak{A})$ die Mutation $\mathfrak{A}_a$ isomorph zu $\mathfrak{A}$, und für $0 \neq a \notin Q(\mathfrak{A})$ antiisomorph zu $\mathfrak{A}$.

Beweis:

1. Sei $0 \neq a \in Q(\mathfrak{A})$. Dann ist $a = b^2$ für ein $b \in \mathfrak{A}$ und

$$P(b)e = 2b(be) - b^2e = a.$$

Mit den Gleichungen (*) und (**) gilt

$$\begin{aligned} (***) \quad P(b)(u \underset{\mathfrak{A}_a}{\cdot} v) &= P(b)P(u, v)P(b)e = \\ &= P(P(b)u, P(b)v)e = \\ &= P(b)u \cdot P(b)v \quad \text{für } u, v \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

d.h. $P(b)$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}_a$ auf $\mathfrak{A}$.

2. Sei $0 \neq a \notin Q(\mathfrak{A})$. Dann ist $a = -b^2$ für ein $b \in \mathfrak{A}$ und

$$P(b)e = b^2 = -a.$$

Wie oben folgt dann

$$\begin{aligned}
 P(b)(u \perp v) &= P(b)P(u, v)a = \\
 &= -P(b)P(u, v)P(b)e = \\
 &= -P(P(b)u, P(b)v)e = \\
 &= -(P(b)u)(P(b)v) \quad \text{für } u, v \in \mathfrak{A},
 \end{aligned}$$

d.h. $P(b)$ ist ein Antisomorphismus von $\mathfrak{A}_a$ auf $\mathfrak{A}$.

Folgerung: Mit $\mathfrak{A}$ ist auch jede Mutation von $\mathfrak{A}$

schwach euklidisch. Dabei wird durch den Antisomorphismus der Quadratbereich auf den Bereich der Nichtquadrate ungleich Null abgebildet.

Eine Gleichung der Form (***) läßt sich genau dann aufstellen, wenn es ein b gibt mit $P(b)e=a$, d.h. genau dann, wenn a ein Quadrat ist. Man kann also folgende Umkehrung von Satz 3 formulieren:

Satz 4: Es sei $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra mit Einselement e .

Zu jeder Mutation $\mathfrak{A}_a$ von $\mathfrak{A}$ mit $a \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ gebe es ein b aus $\mathfrak{A}$ derart, daß $P(b)$ entweder ein Isomorphismus oder ein Antisomorphismus von $\mathfrak{A}_a$ auf $\mathfrak{A}$ ist.

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine schwach euklidische Jordan-Algebra.

3. In euklidischen Jordan-Algebren gilt darüber hinaus

Satz 5: a) Der Grundkörper einer euklidischen Jordan-Algebra ist formal-reell.

- b) Ist das Zentrum einer euklidischen Jordan-Algebra euklidisch, so ist ihr Grundkörper euklidisch.

Beweis: Wie in Satz 2.1 schließt man, daß der Grundkörper formal-reeell ist. Teil b) gilt, da nach [4] der Grundkörper euklidisch ist, wenn ein Erweiterungskörper endlichen Grades euklidisch ist.

Satz 6: Eine euklidische Jordan-Algebra läßt sich vollständig ordnen.

Zum Beweis nehme man die in §2.4 eingeführte teilweise Ordnung, bezüglich der je zwei Elemente in einer euklidischen Jordan-Algebra vergleichbar sind.

Folgerung: Eine euklidische Jordan-Algebra ist pythagoräisch.

Literaturverzeichnis

1. Albert, A.A. On Jordan algebras of linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 59, 524-555 (1946).
2. Albert, A.A. A structure theory for Jordan algebras. Ann. of Math. 48, 546-567 (1947).
3. Albert, A.A. A theory of power-associative commutative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 69, 503-527 (1950).
4. Becker, E. Euklidische Körper und Hüllen. J. für reine und angew. Math. 268/69, 41-52 (1974).
5. Braun, H. und Koecher, M. Jordan-Algebren. Grundlehren der math. Wiss. 128, Springer-Verlag (1966).
6. Diller, J. und Dress, A. Zur Galoistheorie pythagoräischer Körper. Arch. d. Math. 16, 148-152 (1956).
7. Helwig, K.-H. Eine Verallgemeinerung der formal-reellen Jordan-Algebren. Invent. Math. 2, 18-35 (1966).
8. Hertneck, Ch. Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen. Math. Ann. 146, 433-455 (1962).

9. Jacobson, N. Structure and representations of Jordan algebras. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 39 (1968).

10. Jordan, P., v. Neumann, J. und Wigner, E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. of Math. 36, 29-64 (1934).

11. Janssen, G. Formal-reelle Jordanalgebren unendlicher Dimension und verallgemeinerte Positivitätsbereiche. J. für reine und angew. Math. 249, 173-200 (1971).

12. Kokoris, L.A. Simple power-associative algebras of degree two. Ann. of Math. 64, 544-550 (1956).

13. Lorenz, F. Quadratische Formen über Körpern. Lect. Not. in Math. 130, Springer-Verlag (1970).

14. Schafer, R.D. An introduction to nonassociative algebras. Pure and Applied Math. 22, Academic Press (1966).

Lebenslauf

Am 21. September 1947 wurde ich als Sohn des Pfarrers Rolf Fuchs und seiner Ehefrau Hertha, geb. Engel, in Weiden/Opf. geboren.

Von 1953 bis 1957 besuchte ich die Grundschule, anschließend das humanistische Gymnasium in Kulmbach, an dem ich 1966 das Abitur ablegte. Nach Ableistung des Grundwehrdienstes begann ich im Sommersemester 1968 das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen. Nach der Zwischenprüfung im Frühjahr 1970 wechselte ich für ein Jahr nach Hamburg, anschließend studierte ich bis zum Staatsexamen im Sommersemester 1973 wieder in Tübingen. Meine Zulassungsarbeit schrieb ich bei Herrn Prof. Strambach, der damals Dozent in Tübingen war. Im Wintersemester 1973/74 kam ich nach Erlangen, seit dem Sommersemester 1974 bin ich Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz. Seit 1974 bin ich verheiratet mit Reingard Fuchs, geb. Kammerer.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990